Erinnerung: Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V.

Definition: Für jedes $k \geqslant 1$ heisst eine $k \times k$-Matrix der Form

$X - \lambda$

$$J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow J - \lambda I_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

hat MinPol $=$ Char. Pol $= X^k$.

$\Rightarrow J$ hat Min. Pol. $=$
$=$ Char. Pol $= (X-\lambda)^k$.

ein *Jordanblock der Grösse k zum Eigenwert* λ.

Satz: *(Jordansche Normalform)* Ist f trigonalisierbar, so existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ eine Blockdiagonalmatrix mit Jordanblöcken auf der Blockdiagonalen ist.

Zusatz: Dabei gilt weiter:

(a) Für jedes $k \geqslant 1$ ist die Anzahl der Jordanblöcke der Grösse k zum Eigenwert λ gleich

$$2 \dim \operatorname{Kern}\big((f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k\big) - \dim \operatorname{Kern}\big((f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{k-1}\big) - \dim \operatorname{Kern}\big((f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{k+1}\big).$$

(b) Die Diagonalblöcke sind bis auf Vertauschung unabhängig von B.

(c) Die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ ist die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}_\lambda(f)$.

Folge: Der Endomorphismus f ist diagonalisierbar genau dann, wenn sein Minimalpolynom gleich $\prod_i (X - \lambda_i)$ ist für paarweise verschiedene $\lambda_i \in K$.

Bemerkung: Die obige Version der Jordanschen Normalform beinhaltet insbesondere den Fall, dass K algebraisch abgeschlossen ist.

Beweis. f diagbar $\Rightarrow {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$

λ_i paarweise verschiedene EWe.

$\Rightarrow X - \lambda_i \mid$ Min. Pol.

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i) \mid$ Min. Pol.

Wegen $\prod_{i=1}^{r} (f - \lambda_i \mathrm{id}) = 0$

folgt $\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i) =$ Min. Pol.

Umgekehrt: Sei Min. Pol $= \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$, λ_i paarweise verschieden.

$\Rightarrow \varphi(f) = 0 \Rightarrow \varphi(J) = 0$ für jeden Jordanblock J in der JNF von f.

$\Rightarrow$ Min. Pol. von J teilt φ.

J Grösse k $\Rightarrow (X - \lambda)^k \mid \varphi$.

$\Rightarrow k = 1$.

$\Rightarrow$ JNF von f ist Diagonalmatrix. qed.

Beispiel: Die folgende reelle Matrix hat die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Für den allgemeinen Fall müssen wir die Jordanblöcke aus Begleitmatrizen anstatt aus Eigenwerten zusammensetzen:

Definition: Sei $P \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(K)$ die Begleitmatrix eines normierten irreduziblen Polynoms $p(X) \in K[X]$, und betrachte die $d \times d$-Elementarmatrix

$$E_{d1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $p(X) = X - \lambda$ ist $P = (\lambda)$ $\Rightarrow$ wie oben.

Für $k \geqslant 1$ heisst eine $kd \times kd$-Matrix der Blockdreiecksgestalt

$$J := \begin{pmatrix} P & E_{d1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & E_{d1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P \end{pmatrix}$$

Hat MinPol = char Pol. $= p^k$.

ein *Jordanblock der Grösse kd zum irreduziblen Polynom $p(X)$.*

(Zeige $p^{k-1}(J) \neq 0$

Genügt: $p^{k-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$)

Satz: *(Jordansche Normalform)* Es existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ eine Blockdiagonalmatrix mit Jordanblöcken auf der Blockdiagonalen ist.

Beweisskizze: $\mathrm{char}_f = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$; p_i irred., paarweise verschieden, normiert.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hau}_{p_i}(f)$$

Ersetze f durch $f|_{\mathrm{Hau}_{p_i}(f)}$ $\rightsquigarrow$ OBdA $\mathrm{char}_f = p^m$; p irred. normiert.

Setze $n := p(f) \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann gilt $n^m = p^m(f) = 0 \Rightarrow n$ nilpotent.

Setze $V_i := \ker(n^i) \Rightarrow V = V_m \supset V_{m-1} \supset \dots \supset V_0 = 0$

Wähle Komplemente: $V_i = V_{i-1} \oplus W_i$ so dass:

$n(W_{i+1}) < W_i$ — durch absteigende Induktion nach i.

" " $W_i = n(W_{i+1}) \oplus U_i$

Wähle Vektoren $u_{i1}, \dots, u_{ir_i} \in U_i$ so dass die $f^j(u_{i,\nu})$ für $0 \le j < d$, $1 \le \nu \le r_i$ eine Basis von U_i bilden.

$\Rightarrow$ Für eine geeignete Anordnung bilden die $n^k(f^j(u_{i,\nu}))$ für $0 \le j < d$, $1 \le \nu \le r_i$, $0 \le k < i$ eine Basis B mit ${}_B[f]_B = JNF$.

Zusatz: Dabei gilt weiter:

(a) Für jedes $k \geqslant 1$ ist die Anzahl der Jordanblöcke der Grösse kd zu einem irreduziblen Polynom $p(X)$ vom Grad d gleich

$$\frac{1}{d} \cdot \Big(2 \dim \mathrm{Kern}(p(f)^k) - \dim \mathrm{Kern}(p(f)^{k-1}) - \dim \mathrm{Kern}(p(f)^{k+1}) \Big).$$

(b) Die Diagonalblöcke sind bis auf Vertauschung unabhängig von B.

Folge: Zwei Matrizen sind ähnlich genau dann, wenn sie dieselbe Jordansche Normalform haben bis auf Vertauschung der Jordanblöcke.

Folge: Jede quadratische Matrix ist ähnlich zu ihrer Transponierten.

Bew.: A, A^T haben dasselbe char. Pol., $n \times n$-Matrizen.

$\forall p\ \forall k$: $\dim \mathrm{Ker}(p(A)^k) = n - \mathrm{Rang}(p(A)^k)$

$\dim \mathrm{Ker}(p(A^T)^k) = n - \overset{\shortparallel}{\mathrm{Rang}}(p(A^T)^k)$

Aus Zusatz folgt, dass die JNF von A gleich der von A^T ist. qed.

Beispiel: Die folgende reelle Matrix hat die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{U} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

$$\mathrm{CharPol} = (X-1)(X^2+1).$$

$$\mathrm{Hau}_{X-1}(A) = \mathrm{Eig}_1(A) = \ker(L_{A-I_3}) = \ker\left(L_{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}\right) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=:v_1} \rangle$$

$$\mathrm{Hau}_{X^2+1}(A) = \ker(L_{A^2+I_3}) \qquad A^2+I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

$$v_2 := A v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B := (v_1, v_2, v_3)$$

Test: $A v_2 = -v_3$.

$$\Longrightarrow \quad U^{-1} A U = \boxed{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)}$$

Beispiel: Die folgende reelle Matrix hat die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right). \quad (*)$$

$\mathrm{Char}_A(X) = (X^2+1)^2$.

$$A^2 + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{Aber} \quad (A^2+I_4)^2 = 0$$

Also ist die JNF gleich $(*)$.

Berechne $V_1 := \mathrm{Ker}(L_{A^2+I_4}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Wähle $v_4 \in V \setminus V_1$. z.B. $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad v_3 := A v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad v_2 := (A^2+I_4) v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_1 := A v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\qquad U := (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Test!s.